Exercitium III zur Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK — WiSe 2022/23
Indexnotation, Raumkurven — Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Abgabe bis 12:00 am 08.11.2022 — PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

INDEXNOTATION, RAUMKURVEN

[H7] *Index-Gymnastik* **[$2+2+2+2+2=10$ Punkte]**

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Was sind die ersten beiden Größen in Vektorschreibweise?

(a) $\delta_{ij}\, a_i\, b_j = ?\,,$
(b) $\epsilon_{ijk}\, \delta_{lk}\, a_l\, b_j = ?\,,$
(c) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klj} = ?\,,$
(d) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijk} = ?\,,$
(e) $\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jnl}\, \epsilon_{ilm} = ?\,.$

Hinweis: Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

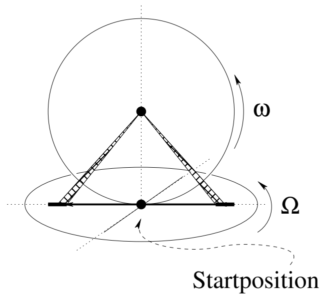
[H8] *Ableitungen von Vektoren* **[$2+2+3+3=10$ Punkte]**

Wir betrachten die Lorentz-Kraft in einem reinen, zeitlich konstanten, Magnetfeld, $\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$.

(a) Berechnen Sie damit $\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$.
(b) Was ergibt sich für $\partial_t\, v^2 = \partial_t\,[\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}]$?
(c) Was können Sie über Richtung von $\vec{a}$ und den Betrag von $\vec{v}$ sagen?
(d) Verwenden Sie die Formeln für das begleitende Dreibein $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ einer Raumkurve, um über $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v\vec{t}$ die Beschleunigung $\vec{a}$ in einen Anteil parallel und einen senkrecht zu $\vec{t}$ zu zerlegen. Machen Sie sich damit klar, dass in unserem Beispiel die in (c) gezeigten Eigenschaften einander notwendig bedingen.

[H9] *Überlagerte Kreisbewegungen* **[$4+4+4+4+4^*=16$ Punkte $+\,4^*$ Extrapunkte]**

Auf dem Schützenfest wird folgende Attraktion geplant: Ein Riesenrad mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit ω wird auf ein Karussell montiert, das mit Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Der Fahrgast in einer Gondel des Riesenrades folgt einer Raumkurve $\vec{r}(t) = R\,\vec{e}_3 + R\Big(\sin\omega t\,\vec{f}(t) - \cos\omega t\,\vec{e}_3\Big)$. Hierbei legen $\vec{e}_3$ und $\vec{f} \doteq \begin{pmatrix}\cos\Omega t\\ \sin\Omega t\\ 0\end{pmatrix}$ die momentane Riesenrad-Ebene fest. Die nebenstehende Skizze verdeutliche ein wenig den Aufbau.



(a) Bilden Sie $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ und $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$. Berechnen Sie daraus die Betragsquadrate v^2 der Geschwindigkeit und a^2 der Beschleunigung.
(b) Vereinfachen Sie die Betragsquadrate aus (a) so, dass Sie den Ausdrücken direkt ansehen können, zu welchem (frühesten) Zeitpunkt und wo (Ortsvektor!) die maximale Geschwindigkeit erreicht wird. Wie groß ist sie? Ist das Resultat plausibel?
(c) Wo und unter welchen Umständen ist die größte Beschleunigung zu ertragen? *Hinweis*: Hier ist eine Fallunterscheidung sinnvoll.
(d) Prüfen Sie nach, ob $\vec{v}(t) = (\vec{\omega}(t) + \vec{\Omega}(t)) \times (\vec{r}(t) - \vec{r}_0)$, wobei für $\vec{r}_0$ der Punkt zu wählen ist, der auf *beiden* Drehachsen liegt.
(e*) *Zusatzaufgabe*: Berechnen Sie für den oberen Scheitelpunkt der Bahn Krümmung $\kappa = |\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|/v^3$ und Torsion $\tau = \dot{\vec{r}}\cdot(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})/|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2$ und vergleichen Sie mit R^{-1}.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!